Mecánica Celeste

Examen VI

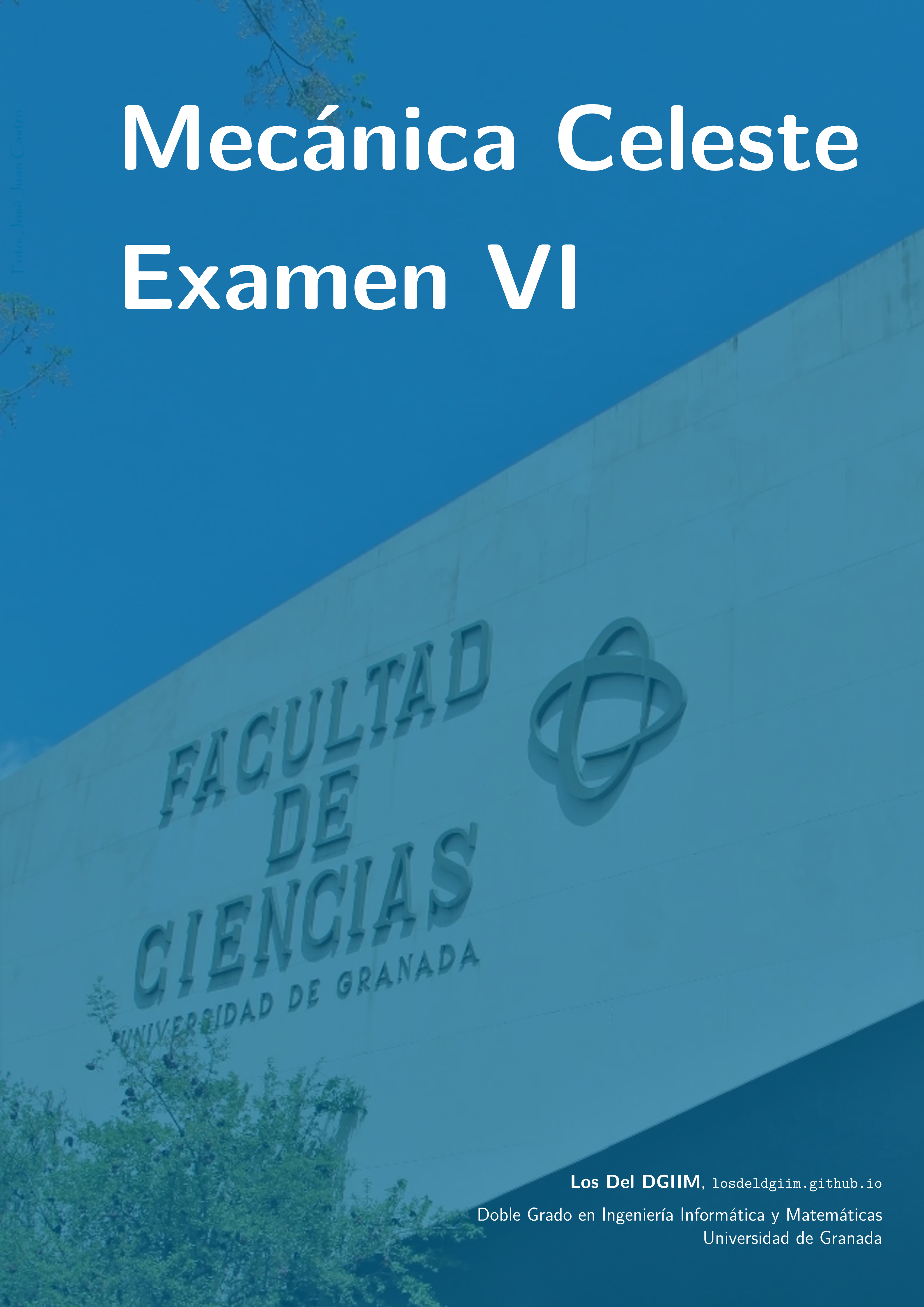

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Incidencias Segundo Parcial.

Duración 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Pon un ejemplo razonado de un problema de dos cuerpos

a) [1] en el que las dos masas se muevan sobre una recta pero no colisionen.

b) [1] en el que las dos masas no sigan un movimiento rectilíneo y se alejen infinitamente de un observador que está situado en el origen.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico fijo se está observando el movimiento de dos asteroides aislados que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones, sus posiciones respecto al observatorio son $x(0) = (0, 1, -1)$, $y(0) = (0, -3, 3)$, y las velocidades con las que se mueven son $\dot{x}(0) = (1, 1, -1)$, $\dot{y}(0) = (1, -3, -1)$. Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es cuatro veces la del que está en la posición y. Se pide:

a) [1] Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

b) [1] Determina el movimiento que se observará desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide menor.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Se consideran tres masas iguales en los puntos $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ con velocidades iniciales $\dot{r}_1(0) = (0, 1/3)$, $\dot{r}_2(0) = (-\sqrt{3}/6, -1/6)$ y $\dot{r}_3(0) = (\sqrt{3}/6, -1/6)$. Se supone que sobre estas masas actúa únicamente la atracción que cada una ejerce sobre las otras según la Ley de Gravitación Universal.

a) [1] Comprueba que el centro de masas permanece fijo en el origen.

b) [1] El movimiento resultante, ¿se puede producir sobre una circunferencia?

c) [1] ¿Puede haber colapso total?

d) [1] Explica de forma intuitiva cuál crees que puede ser el movimiento resultante.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** En el problema restringido circular

a) [1] ¿dónde colocarías un satélite y con qué velocidad inicial para asegurarte de que se mantiene siempre a igual distancia de cada una de las masas?

b) [1] ¿Y si lo que quieres es que no se acerque a una distancia menor de 1 de una de las primarias?

Razona tus respuestas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Pon un ejemplo razonado de un problema de dos cuerpos

a) [1] en el que las dos masas se muevan sobre una recta pero no colisionen.

Consideramos $m_1 = m_2 = m > 0$, así como las siguientes condiciones iniciales.

$$x(0) = (0, 0, 1), \quad y(0) = (0, 0, -1)$$

$$\dot{x}(0) = (0, 0, v), \quad \dot{y}(0) = (0, 0, -v)$$

con $v > 0$. Sabemos por teoría que $\ddot{C}(t) = 0$, luego el centro de masas se mueve a velocidad constante, $C(t) = \alpha + \beta t$, con $\alpha = C(0), \beta = \dot{C}(0)$[1]. Como por definición el centro de masas es

$$C(t) = \frac{m_1 x(t) + m_2 y(t)}{m_1 + m_2}$$

y su derivada es

$$\dot{C}(t) = \frac{m_1 \dot{x}(t) + m_2 \dot{y}(t)}{m_1 + m_2}$$

Vemos que

$$\alpha = C(0) = \frac{x(0) + y(0)}{2} = \frac{1}{2}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Análogamente,

$$\beta = \frac{1}{2}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Por lo tanto,

$$C(t) = \alpha + \beta t \equiv 0$$

es decir, el centro de masas permanece fijo en el origen. Entonces se cumple que

$$m_1 x + m_2 y = 0 \Longrightarrow y = -\frac{m_1}{m_2} x = -x$$

Ahora, conocemos el problema de Kepler que verifica x:

$$\ddot{x} = -G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x}{|x|^3} = -G \frac{m^3}{4m^2} \frac{x}{|x|^3} = -\frac{Gm}{4} \frac{x}{|x|^3} = -\mu \frac{x}{|x|^3}$$

Como

$$c_x = \tilde{x}(0) \wedge \dot{\tilde{x}}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & v \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, 0, 0) \Longrightarrow |c_x| = 0$$

[1] Aplicando el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Lineales visto en Ecuaciones Diferenciales I

el movimiento será rectilíneo en ambos cuerpos, y además sobre la misma recta, ya que por una Proposición vista en teoría, el centro de masas siempre está en la envolvente convexa de los n cuerpos (en el caso $n = 2$, la envolvente convexa es el segmento que los une).

Obtenemos la condición de mínima velocidad para que la trayectoria no esté acotada.

La energía total es constante, por lo que la obtenemos en $t = 0$

$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{\mu}{|x(0)|} = \frac{1}{2}v^2 - \mu = \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{4}$$

Imponemos $E \geqslant 0$ para que la trayectoria no sea elíptica

$$E \geqslant 0 \iff \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{4} \geqslant 0 \iff \frac{1}{2}v^2 \geqslant \frac{Gm}{4} \iff v \geqslant \sqrt{\frac{Gm}{2}} \tag{1}$$

Por tanto, si v verifica (1), entonces, por la clasificación de movimientos rectilíneos en campos de fuerza newtonianos, sabemos que $r(t) = |x(t)|$ es estrictamente creciente, pues $\dot{r}(0) > 0$, y sabemos que no hay cambio de monotonía, luego $r(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. De esta forma, teniendo en cuenta que

$$|(x - y)(t)| = 2|x(t)| = 2r(t) \geqslant 2r(0) = 2 > 0 \quad (t \geqslant 0)$$

no hay colisión en $[0, +\infty[$.

b) [1] en el que las dos masas no sigan un movimiento rectilíneo y se alejen infinitamente de un observador que está situado en el origen.

Consideramos $m_1 = m_2 = m > 0$, y las siguientes condiciones iniciales.

$$x(0) = (1, 0, 0), \quad y(0) = (-1, 0, 0)$$
$$\dot{x}(0) = (0, v, 0), \quad \dot{y}(0) = (0, -v, 0)$$

con $v > 0$.

Igual que en el apartado anterior, $\ddot{C}(t) = 0$, luego $C(t) = \alpha + \beta t$, con $\alpha = C(0)$ y $\beta = \dot{C}(0)$. Como

$$C(0) = \frac{x(0) + y(0)}{2} = (0, 0, 0), \quad \dot{C}(0) = \frac{\dot{x}(0) + \dot{y}(0)}{2} = (0, 0, 0)$$

concluimos que $C(t) = C(0) + \dot{C}(0)t \equiv 0$, es decir, el centro de masas permanece fijo en el origen.

Ahora, si $c_x \neq 0$, entonces, si x sigue la cónica $|x| + \langle e, x\rangle = k$, con $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$, como el centro de masas está en el origen $m_1 x + m_2 y = 0 \Longrightarrow y = -x$, y entonces y sigue la cónica $|y| + \langle -e, y\rangle = k$.

En efecto

$$c_x = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, 0, v) \Longrightarrow |c_x| = v > 0$$

El problema de Kepler que sigue x es conocido

$$\ddot{x} = -\frac{Gm}{4}\frac{x}{|x|^3} = -\mu\frac{x}{|x|^3}$$

y basta imponer que la energía total sea positiva para que la trayectoria sea hiperbólica.

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{\mu}{|x(0)|} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{4}$$

Como la trayectoria es hiperbólica si y solo si $|e| > 1 \iff h > 0$, entonces

$$h > 0 \iff \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{4} > 0 \iff \frac{1}{2}v^2 > \frac{Gm}{4} \iff v > \sqrt{\frac{Gm}{2}} \tag{2}$$

Por lo tanto, dada la masa $m > 0$, si v verifica (2), entonces ambos cuerpos siguen una trayectoria hiperbólica (no siguen un movimiento rectilíneo) y se alejan infinitamente de un observador que está situado en el origen.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico fijo se está observando el movimiento de dos asteroides aislados que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones, sus posiciones respecto al observatorio son $x(0) = (0, 1, -1)$, $y(0) = (0, -3, 3)$, y las velocidades con las que se mueven son $\dot{x}(0) = (1, 1, -1)$, $\dot{y}(0) = (1, -3, -1)$. Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es cuatro veces la del que está en la posición y. Se pide:

a) [1] Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

Sabemos por teoría que $\ddot{C}(t) = 0$, o equivalentemente, $C(t) = \alpha + \beta t$, con $\alpha = C(t_0)$, $\beta = \dot{C}(t_0)$, siempre que $t_0 \in I$ pertenezca al intervalo maximal de definición[2]. El enunciado dice cuando "se comienzan las observaciones", por lo que ubicamos ahí el origen, y tomamos $t_0 = 0$. Entonces, denotando por m_1 a la masa del asteroide que ocupa la posición x, e igualmente m_2 a la masa del asteroide de posición y, se tiene que $m_1 = 4m_2$. Si $m_2 = m > 0$, se verifica $m_1 + m_2 = 5m$.

Ahora, por definición, el centro de masas es

$$C(t) = \frac{m_1 x(t) + m_2 y(t)}{m_1 + m_2}$$

y su derivada es

$$\dot{C}(t) = \frac{m_1 \dot{x}(t) + m_2 \dot{y}(t)}{m_1 + m_2}$$

Obtenemos $\alpha = C(0)$ y $\beta = \dot{C}(0)$.

$$\alpha = C(0) = \frac{4x(0) + y(0)}{5}$$

Como $4x(0) + y(0) = 4(0, 1, -1) + (0, -3, 3) = (0, 1, -1)$, entonces

$$\alpha = \left(0, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

Análogamente, $4\dot{x}(0) + \dot{y}(0) = 4(1, 1, -1) + (1, -3, -1) = (5, 1, -5)$, luego

$$\beta = \frac{1}{5}(5, 1, -5) = \left(1, \frac{1}{5}, -1\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{C(t) = \left(0, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) + \left(1, \frac{1}{5}, -1\right) t}$$

[2]También por el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Lineales visto en Ecuaciones Diferenciales I

b) [1] Determina el movimiento que se observará desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide menor.

Consideramos el sistema con centro de masas fijo en el origen, utilizando el Principio de Relatividad de Galileo, $\tilde{x}(t) = x(t) - \alpha - \beta t$, $\tilde{y}(t) = y(t) - \alpha - \beta t$ donde $C(t) = \alpha + \beta t$ ya calculado en el apartado anterior.

Sabemos que entonces $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es solución al mismo problema de los dos cuerpos y el centro de masas en este sistema verifica $\tilde{C}(t) \equiv 0$. Consecuentemente

$$m_1\tilde{x} + m_2\tilde{y} = 0 \Longrightarrow \tilde{y} = -\frac{m_1}{m_2}\tilde{x} = -4\tilde{x}$$

Si el asteroide identificado por x sigue la cónica $|x| + \langle e, x\rangle = k$ con $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$ entonces se ha visto en teoría que el asteroide identificado por y sigue la cónica $|y| + \langle -e, y\rangle = 4k$, es decir, las dos cónicas son del mismo tipo, y los ejes de excentricidad opuestos.

El asteroide identificado por x (visto en teoría) sigue un problema de Kepler

$$\ddot{\tilde{x}} = -G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -G\frac{m}{25}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -\mu\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3}$$

Estudiamos uno de los dos asteroides, y el otro ya lo tendremos. Obtenemos el momento angular c_x, primero viendo que

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \alpha = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(0) - \beta = \left(0, \frac{4}{5}, 0\right)$$

$$c_x = \tilde{x}(0) \wedge \dot{\tilde{x}}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 4/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = \left(\frac{16}{25}, 0, 0\right) \Longrightarrow |c_x| \neq 0$$

Tenemos entonces que ambos cuerpos se moverán sobre una elipse, hipérbola o parábola, con un foco en el origen, por la Primera Ley de Kepler. Para determinar la cónica, obtenemos la energía total.

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|}$$

Viendo que

$$|\tilde{x}(0)|^2 = 0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{16}{25} = \frac{32}{25} \Longrightarrow |\tilde{x}(0)| = \sqrt{\frac{32}{25}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

y

$$|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 = 0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 = \frac{16}{25}$$

Como

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} - \frac{Gm}{25} \frac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{5}} =$$

$$\frac{8}{25} - \frac{Gm}{25} \cdot \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{8}{25} - \frac{Gm}{20\sqrt{2}}$$

el tipo de movimiento visto desde el sistema con centro de masas fijo en el origen dependerá entonces de la masa m.

- Será elíptica si y solo si

$$h < 0 \iff \frac{8}{25} - \frac{Gm}{20\sqrt{2}} < 0 \iff \frac{8}{25} < \frac{Gm}{20\sqrt{2}} \iff \frac{32\sqrt{2}}{5G} = \frac{20\sqrt{2} \cdot 8}{25G} < m$$

- Será parabólica si y solo si

$$h = 0 \iff m = \frac{32\sqrt{2}}{5G}$$

- Será hiperbólica si y solo si

$$h > 0 \iff m < \frac{32\sqrt{2}}{5G}$$

Y el otro cuerpo seguirá la misma cónica.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Se consideran tres masas iguales en los puntos $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $P_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ con velocidades iniciales $\dot{r}_1(0) = (0, 1/3)$, $\dot{r}_2(0) = (-\sqrt{3}/6, -1/6)$ y $\dot{r}_3(0) = (\sqrt{3}/6, -1/6)$. Se supone que sobre estas masas actúa únicamente la atracción que cada una ejerce sobre las otras según la Ley de Gravitación Universal.

a) [1] Comprueba que el centro de masas permanece fijo en el origen.

Consideramos $m_i = m > 0, i = 1, 2, 3$. Por definición, el centro de masas en el problema de los n cuerpos es

$$C(t) \overset{def}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i(t) \quad M = \sum_{j=1}^{n} m_j$$

Para $n = 3$, y las condiciones anteriores, vemos que

$$C(t) = \frac{1}{3m} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i(t) = \frac{1}{3\cancel{m}} \cdot \left(\cancel{m} \left((1,0) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right) \right) =$$
$$\frac{1}{3}(0,0) = (0,0)$$

Por tanto, el centro de masas permanece fijo en el origen.

b) [1] El movimiento resultante, ¿se puede producir sobre una circunferencia?

Para verlo, consideraremos el Teorema de las Soluciones Circulares de Lagrange para el problema de los 3 cuerpos:

Teorema 0.1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no alineados. Entonces*

$$r_i(t) = R[\omega t] z_i, \quad i = 1, 2, 3$$

es solución del problema de tres cuerpos si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

a) El centro de masas está en el origen, es decir,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$$

b) Los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$.

c) $|\omega| = \sqrt{\dfrac{GM}{d^3}}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3$

Denotamos por $z_i \overset{not}{=} P_i$ a cada punto del Teorema 0.1:

a) Trivialmente

$$m((1,0)+(-1/2,\sqrt{3}/2)+(-1/2,-\sqrt{3}/2))=m(0,0)=(0,0)$$

b) Hay que comprobar que las longitudes de los tres lados del triángulo sean iguales.

$$|P_3-P_1|=|(-1/2,-\sqrt{3}/2)-(1,0)|=|(-3/2,-\sqrt{3}/2)|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$$

$$|P_3-P_2|=|(-1/2,-\sqrt{3}/2)-(-1/2,\sqrt{3}/2)|=|(0,-\sqrt{3})|=\sqrt{3}$$

$$|P_2-P_1|=|(-1/2,\sqrt{3}/2)-(1,0)|=|(-3/2,\sqrt{3}/2)|=|(-3/2,-\sqrt{3}/2)|=|P_3-P_1|=\sqrt{3}$$

c) Y por último

$$|\omega|=\sqrt{\frac{GM}{d^3}}=\sqrt{\frac{3Gm}{\sqrt{3}^3}}=\sqrt{\frac{\cancel{3}Gm}{\cancel{3}\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{Gm}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{Gm}}{\sqrt[4]{3}}=3^{-1/4}\sqrt{Gm}$$

Por lo tanto, en módulo, la velocidad angular a la que debe girar el conjunto para llegar a la solución del problema de los tres cuerpos dependerá de la masa m común a los tres cuerpos, y es

$$\boxed{|\omega|=3^{-1/4}\sqrt{Gm}}$$

Expresamos entonces $r_i(t)=R[\omega t]z_i, \quad i=1,2,3$. Así,

$$\dot{r}_i(t)=\omega JR[\omega t]P_i=\omega Jr_i(t) \quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

En $t=0$, $\dot{r}_i(0)=\omega JP_i$. Para que el movimiento se desarrolle sobre una circunferencia, debe verificarse $\dot{r}_i(0)=\omega JP_i$ con $i=1,2,3$ para un mismo ω. Para ver si tal ω existe, obtenemos los $JP_i, i=1,2,3$ y vemos si con las velocidades iniciales dadas ω verifica las tres igualdades.

1. $JP_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(1,0)=(0,1)\Longrightarrow \dot{r}_1(0)=(0,1/3)=\omega(0,1)\Longrightarrow \omega=1/3$
2. $JP_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(-1/2,\sqrt{3}/2)=(-\sqrt{3}/2,-1/2)\Longrightarrow \dot{r}_2(0)=(-\sqrt{3}/6,-1/6)=\omega(-\sqrt{3}/2,-1/2)\Longrightarrow \omega=1/3$
3. $JP_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(-1/2,-\sqrt{3}/2)=(\sqrt{3}/2,-1/2)\Longrightarrow \dot{r}_3(0)=(\sqrt{3}/6,-1/6)=\omega(\sqrt{3}/2,-1/2)\Longrightarrow \omega=1/3$

Por lo tanto, a nivel cinemático, sí que puede producirse, al menos inicialmente, un movimiento sobre una circunferencia. Si queremos además que la circunferencia no se deforme (el triángulo equilátero lo siga siendo a lo largo del tiempo), entonces habría que imponer m de tal manera que

$$\frac{1}{3} = |\omega| = 3^{-1/4}\sqrt{Gm} \iff \frac{1}{9} = 3^{-2/4}Gm \iff m = \frac{1}{9 \cdot 3^{-2/4} \cdot G}$$

c) [1] ¿Puede haber colapso total?

Buscamos aplicar el Teorema de Sundman, ya que por el apartado a) sabemos que $C(t) \equiv 0$ (permanece fijo en el origen):

Teorema 0.2. *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos con centro de masas fijo en el origen y una colisión (colapso) total. Entonces su momento angular es $c = 0$.*

Si el momento angular del problema no es cero, entonces no podrá producirse una colisión total.

Por definición, el momento angular en el problema de los n cuerpos es

$$c \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i \wedge \dot{r}_i)$$

También sabemos que se verifica la conservación del momento angular en el problema de los n cuerpos, por lo que basta calcularlo en algún instante de tiempo. En este caso, usaremos $t = 0$.

1. $(1, 0) \wedge (0, 1/3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = 1/3k = (0, 0, 1/3)$
2. $(-1/2, \sqrt{3}/2) \wedge (-\sqrt{3}/6, -1/6) = \begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & -1/6 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, 0, 1/3)$
3. $(-1/2, -\sqrt{3}/2) \wedge (\sqrt{3}/6, -1/6) = \begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/6 & -1/6 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, 0, 1/3)$

$$c = (0, 0, m \cdot (\cancel{3} \cdot 1/\cancel{3})) = (0, 0, m) \neq 0$$

porque $m > 0$. Así pues, por el Teorema 0.2, no puede haber colapso total.

d) [1] Explica de forma intuitiva cuál crees que puede ser el movimiento resultante.

Si $\omega = 1/3$, hay dos opciones.

1. Si
$$m = \frac{1}{9 \cdot 3^{-2/4} \cdot G}$$
entonces el movimiento se da sobre circunferencias concéntricas centradas en el origen, de tal manera que los tres cuerpos forman los vértices de un triángulo equilátero rígido de lado $\sqrt{3}$, que no se deforma por ser $r_i(t) = R[\omega t]P_i, i = 1, 2, 3$ solución al problema de los tres cuerpos, y rotan con la misma velocidad angular.
2. Si
$$m \neq \frac{1}{9 \cdot 3^{-2/4} \cdot G}$$
entonces, aunque el movimiento inicialmente se pueda dar sobre una circunferencia, con el paso del tiempo el triángulo equilátero se deforma (a priori no se sabe si los cuerpos se acercarán o se alejarán). Si se acercan, lo harán de tal manera que nunca se produzca colisión total, por lo visto en el apartado c), y si se alejan, cada una divergerá en el infinito.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** En el problema restringido circular

a) [1] ¿dónde colocarías un satélite y con qué velocidad inicial para asegurarte de que se mantiene siempre a igual distancia de cada una de las masas?

Sabemos por teoría que los puntos de libración L_4 y L_5 son puntos estables en el problema restringido circular, y cada uno forma un triángulo equilátero de lado 1 con las primarias, supuestas situadas en $P_1 = (-\mu, 0)$, $P_2 = (1 - \mu, 0)$, con $\mu \in]0, 1/2]$. Por lo tanto, basta colocar un satélite en L_4 o L_5, en reposo (con velocidad inicial nula), para asegurarse de que siempre se mantenga a igual distancia de cada una de las masas.

b) [1] ¿Y si lo que quieres es que no se acerque a una distancia menor de 1 de una de las primarias?

Por teoría sabemos que L_1 y L_3 están a distancia mayor que 1 de una de las dos primarias, y además son puntos de equilibrio en el problema restringido circular. Concretamente, si $P_1 = (-\mu, 0)$, $P_2 = (1 - \mu, 0)$, con $\mu \in]0, 1/2]$, entonces:

1. Si queremos que no se acerque a una distancia menor de 1 de la primaria situada en P_1, lo colocaríamos desde el reposo en L_3.
2. Si queremos que no se acerque a una distancia menor de 1 de la primaria situada en P_2, lo colocaríamos desde el reposo en L_1.